

## 14.1

- a) Merkitään yhden viikon muutoskerrointa kirjaimella  $q$ .

Fenoksihappoja on alussa 600 g ja sen määrä tulee joka viikko  $q$ -kertaiseksi. Kolmen viikon kuluttua fenoksihappojen määrä on  $600 \cdot q^3$  (g).

Toisaalta kolmen viikon kuluttua fenoksihapoista on jäljellä

$$\frac{600 \text{ g}}{2} = 300 \text{ g}.$$

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan muutoskerroin  $q$ .

$$600 \cdot q^3 = 300$$

[Ratkaistaan CAS-laskimella.](#)

$$q = 0,7937005\dots$$

$$q \approx 0,79370$$

Fenoksihappojen määrä tulee joka viikko 0,79370-kertaiseksi, joten viikon kuluttua fenoksihappoja on jäljellä 79,370 % tämän hetkisestä määrästä. Yhdessä viikossa fenoksihapoista muiksi aineiksi hajoaa  $100 \% - 79,370 \% = 20,630 \% \approx 21 \%$ .

- b) Fenoksihappojen määrän grammoina  $x$  viikon kuluttua ilmaisee funktio  $f(x) = 600 \cdot 0,79370^x$ .

Lasketaan funktion  $f$  arvo, kun  $x = 8$  (viikkoa).

$$f(8) = 600 \cdot 0,79370^8 = 94,493\dots \approx 94 \text{ (g)}$$

Fenoksihappoja on jäljellä 8 viikon kuluttua 94 g.

c) Ratkaistaan, millä muuttujan  $x$  arvolla funktion  $f$  arvo on 50 (g).

$$f(x) = 50$$

Sijoitetaan  $f(x) = 600 \cdot 0,79370^x$ .

$$600 \cdot 0,79370^x = 50$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = 10,754\dots$$

$$x \approx 11 \text{ (viikkoa)}$$

Fenoksihappojen määrä vähenee ajan kuluessa, joten niiden määrä on alle 50 g, kun aikaa on kulunut vähintään 11 viikkoa.

### Vastaus

a) 21 %

b) 94 g

c) 11 viikkoa

## 14.2

- a) Merkitään yhden vuoden muutoskerrointa kirjaimella  $q$ . Intian väkiluku vuonna 1979 oli 616 miljoonaa ja se tulee joka vuosi  $q$ -kertaiseksi. Vuoden kuluttua Intian väkiluku on  $616 \cdot q$  (miljoonaa).

Toisaalta vuoden kuluttua Intian väkiluku oli 630 miljoonaa.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan muutoskerroin  $q$ .

$$616 \cdot q = 630$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$q = 1,022727...$$

$$q \approx 1,0227$$

Intian väkiluku tulee joka vuosi 1,0227-kertaiseksi, joten Intian väkiluvun miljoonina  $x$  vuoden kuluttua ilmaisee funktio

$$f(x) = 616 \cdot 1,0227^x.$$

Vuodesta 1979 vuoteen 2000 on 21 vuotta. Lasketaan funktion  $f$  arvo, kun  $x = 21$  (vuotta).

$$f(21) = 616 \cdot 1,0227^{21} = 986,947... \approx 987 \text{ (miljoonaa)}$$

Ennusteen mukaan Intian väkiluku vuonna 2000 olisi 987 miljoonaa.

- b) Lasketaan, kuinka monta prosenttia ennuste on todellista arvoa pienempi.

$$\frac{1052 - 987}{1052} = 0,062... = 6,2... \% \approx 6,6 \%$$

### Vastaus

- a) 987 miljoonaa    b) Ennuste oli 6,6 % liian alhainen.

## 14.3

Kootaan tiedot taulukkoon.

vuosi	työmatkan pituus (min)
2016	42
2021	58

- a) Työmatkan pituus kasvaa joka vuosi yhtä monta minuuttia, joten muutos on lineaarista.

5 vuoden aikana työmatkan pituus on kasvanut

$58 - 42 = 16$  minuuttia. Yhdessä vuodessa kasvu on ollut keskimäärin

$$\frac{16}{5} = 3,2 \text{ minuuttia.}$$

Kun vuoden 2016 alusta on kulunut  $x$  vuotta, työmatkan pituuden ilmaisee funktio

$$f(x) = 3,2x + 42.$$

Työmatkan pituuteen 42 min  
lisätään  $x$  kertaa 3,2 min.

Kaksi tuntia on 120 minuuttia. Ratkaistaan, millä muuttujan  $x$  arvolla funktion  $f$  arvo on 120 (min).

$$f(x) = 120$$

Sijoitetaan  $f(x) = 3,2x + 42$ .

$$3,2x + 42 = 120$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = 24,375$$

$$x \approx 24,4 \text{ (vuotta)}$$

Vuoden 2016 alusta täytyy aikaa kulua vähintään 24,4 vuotta.

Ensimmäinen vuosi, jonka alussa työmatkan pituus on yli 120 minuuttia, on  $2016 + 25 = 2041$ .

- b) Työmatkan pituus muuttuu joka vuosi yhtä monta prosenttia, joten muutos on eksponentiaalista.

Merkitään yhden vuoden muutoskerrointa kirjaimella  $q$ . Kun vuodesta 2016 on kulunut 5 vuotta, työmatkan pituus on  $42 \cdot q^5$  (min). Toisaalta työmatkan pituus on 58 min.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan muutoskerroin  $q$ .

$$42 \cdot q^5 = 58$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$q = 1,06668\dots$$

$$q \approx 1,0667$$

Kun vuodesta 2016 on kulunut  $x$  vuotta, työmatkan pituuden ilmaisee funktio

$$g(x) = 42 \cdot 1,0667^x.$$

Työmatkan pituus 42 min kerrotaan  $x$  kertaa luvulla 1,0667.

Ratkaistaan millä muuttujan  $x$  arvolla funktion  $g$  arvo on 120 (min).

$$g(x) = 120$$

Sijoitetaan  $g(x) = 42 \cdot 1,0667^x$ .

$$42 \cdot 1,0667^x = 120$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = 16,258\dots$$

$$x \approx 16,3 \text{ (vuotta)}$$

Vuoden 2016 alusta täytyy aikaa kulua vähintään 16,3 vuotta. Ensimmäinen vuosi, jonka alussa työmatkan pituus on yli 120 minuuttia, on  $2016 + 17 = 2033$ .

**Vastaus**

a) 2041

b) 2033

## 14.4

Kootaan tiedot taulukkoon.

vuosi	elokuvalipun hinta (€)
2010	8,70
2012	9,40

- a) Kun elokuvalipun hinnan muutos on lineaarista, elokuvalipun hinta muuttuu yhtä monta euroa joka vuosi.

2 vuoden aikana elokuvalipun hinta on kasvanut

$9,40 - 8,70 = 0,70$  euroa. Yhdessä vuodessa kasvu on ollut

keskimäärin  $\frac{0,70}{2} = 0,35$  euroa.

Kun vuoden 2010 alusta on kulunut  $x$  vuotta, elokuvalipun hinnan ilmaisee funktio

$$f(x) = 0,35x + 8,70.$$

Elokuvalipun hintaan 8,70 €  
lisätään  $x$  kertaa 0,35 €.

Vuoteen 2019 mennessä vuodesta 2010 on kulunut 9 vuotta.

Lasketaan funktion  $f$  arvo, kun  $x = 9$  (vuotta).

$$f(9) = 0,35 \cdot 9 + 8,70 = 11,85 \text{ (€)}$$

Arvion mukaan vuonna 2019 elokuvalipun keskimääräinen hinta on 11,85 €.

Lasketaan vielä, kuinka monta prosenttia arvio eroaa vuoden 2019 lipun keskimääräisestä hinnasta 11,40 €.

$$\frac{11,85 \text{ €} - 11,40 \text{ €}}{11,40 \text{ €}} = 0,0394... = 3,94... \% \approx 3,9 \%$$

- b) Kun elokuvalipun hinnan muutos on eksponentiaalista, elokuvalipun hinta muuttuu yhtä monta prosenttia joka vuosi.

Merkitään yhden vuoden muutoskerrointa kirjaimella  $q$ . Kun vuodesta 2010 on kulunut 2 vuotta, elokuvalipun hinta on  $8,70 \cdot q^2$  (€). Toisaalta elokuvalipun hinta on 9,40 €.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan muutoskerroin  $q$ .

$$8,70 \cdot q^2 = 9,40$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$q = -1,039451... \text{ tai } q = 1,039451...$$

$$q \approx -1,03945 \quad q \approx 1,03945$$

Muutoskerroin on positiivinen luku, joten  $q \approx 1,03945$ .

Kun vuodesta 2010 on kulunut  $x$  vuotta, elokuvalipun hinnan ilmaisee funktio

$$g(x) = 8,70 \cdot 1,03945^x.$$

Elokuvalipun hinta 8,70 € kerrotaan  $x$  kertaa luvulla 1,03945.

Lasketaan funktion  $g$  arvo, kun  $x = 9$  (vuotta).

$$g(9) = 8,70 \cdot 1,03945^9 = 12,323... \approx 12,32 \text{ (€)}$$

Arvion mukaan vuonna 2019 elokuvalipun keskimääräinen hinta on 12,32 €.

Lasketaan vielä, kuinka monta prosenttia arvio eroaa vuoden 2019 lipun keskimääräisestä hinnasta 11,40 €.

$$\frac{12,32 \text{ €} - 11,40 \text{ €}}{11,40 \text{ €}} = 0,0807... = 8,07... \% \approx 8,1 \%$$

### Vastaus

- a) 11,85 €, eroaa 3,9 %  
b) 12,32 €, eroaa 8,1 %

## 14.5

Merkitään valon alkuperäistä määrää kirjaimella  $a$ .

Yhden senttimetrin paksuisen kerroksen läpi pääsee 65 % siihen tulevasta valosta, joten läpi päässeän valon määrä tulee  $0,65$ -kertaiseksi. Kun valo on läpäissyt  $x$  senttimetriä paksun lasin, valon määrä on tullut  $0,65^x$ -kertaiseksi.

Valon määrän  $x$  senttimetriä paksun lasin jälkeen ilmaisee funktio  $f(x) = a \cdot 0,65^x$ .

a) Lasketaan funktion  $f$  arvo, kun  $x = 3,0$  (cm).

$$f(3,0) = a \cdot 0,65^{3,0} = 0,274625a \approx 0,27a$$

Alkuperäisestä valon määrästä  $a$  on jäljellä 27 %.

b) Neljäsosa valon alkuperäisestä määrästä on  $0,25a$ .

Ratkaistaan, millä muuttujan  $x$  arvolla funktion  $f$  arvo on  $0,25a$ .

$$f(x) = 0,25a$$

Sijoitetaan  $f(x) = a \cdot 0,65^x$ .

$$a \cdot 0,65^x = 0,25a$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = 3,218\dots$$

$$x \approx 3,2 \text{ (cm)}$$

Valon määrä vähenee neljäsosaan alkuperäisestä, kun lasin paksuus on 3,2 cm.

**Vastaus**

a) 27 %

b) 3,2 cm

## 14.6

- a) Merkitään alkuperäistä asukaslukua kirjaimella  $a$  ja yhden vuoden muutoskerrointa kirjaimella  $q$ . Asukasluku tulee yhden vuoden aikana  $q$ -kertaiseksi. 40 vuoden kuluttua asukasluku on  $a \cdot q^{40}$ .

Toisaalta 40 vuodessa asukasluku kaksinkertaistuu, eli 40 vuoden kuluttua asukasluku on  $2a$ .

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan muutoskerroin  $q$ .

$$a \cdot q^{40} = 2a$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$q = -1,0174796... \quad \text{tai} \quad q = 1,0174796...$$

$$q \approx -1,01748 \quad q \approx 1,01748$$

Muutoskerroin on positiivinen luku, joten  $q \approx 1,01748$ .

Yhden vuoden aikana asukasluku kasvaa siis  
 $101,748 \% - 100 \% = 1,748 \% \approx 1,7 \%$ .

- b) Kun asukasluku on kasvanut  $50 \%$  alkuperäisestä asukasluvusta  $a$ , se on  $1,5a$ .

Asukaslukua  $x$  vuoden jälkeen ilmaisee funktio  $f(x) = a \cdot 1,01748^x$ .

Ratkaistaan, millä muuttujan  $x$  arvolla funktion  $f$  arvo on  $1,5a$ .

$$f(x) = 1,5a$$

Sijoitetaan  $f(x) = a \cdot 1,01748^x$ .

$$a \cdot 1,01748^x = 1,5a$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = 23,398...$$

$$x \approx 23 \text{ (vuotta)}$$

Asukasluku kasvaa  $50 \%$  noin 23 vuodessa.

### Vastaus

- a)  $1,7 \%$       b) 23 vuodessa

## 14.7

- a) Suolaa on alussa 2500 kg ja sitä poistuu ensimmäisen viikon aikana 400 kg. Lasketaan, kuinka monta prosenttia suolasta poistui.

$$\frac{400}{2500} = 0,16 = 16 \%$$

- b) Kun suolaa poistuu viikossa 16 %, jäljelle jää  $100 \% - 16 \% = 84 \%$  edellisen viikon määrästä. Suolan määrä tulee siis joka viikko 0,84-kertaiseksi.

Suolan määrän  $x$  viikon kuluttua ilmaisee funktio

$$f(x) = 2500 \cdot 0,84^x.$$

Lasketaan funktion  $f$  arvo, kun  $x = 4$  (viikkoa).

$$f(4) = 2500 \cdot 0,84^4 = 1244,678... \approx 1200 \text{ (kg)}$$

Neljän viikon kuluttua suolaa on jäljellä noin 1200 kg.

Puoli vuotta on 26 viikkoa. Lasketaan funktion  $f$  arvo, kun  $x = 26$  (viikkoa).

$$f(26) = 2500 \cdot 0,84^{26} = 26,865... \approx 27 \text{ (kg)}$$

Puolen vuoden kuluttua suolaa on jäljellä noin 27 kg.

### Vastaus

- a) 16 %  
b) 1200 kg ja 27 kg

## 14.8

Mirjamin käyttämä muutoskerroin on virheellinen. Jos palkat nousevat vuodessa 1,5 %, vuoden kuluttua palkat ovat  $100 \% + 1,5 \% = 101,5 \%$  tämän hetkisestä arvosta. Palkat siis tulevat joka vuosi 1,015-kertaiseksi.

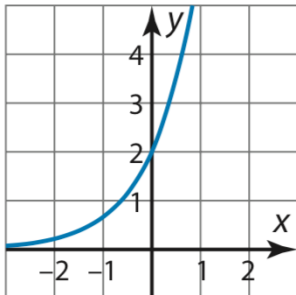
Palkka on siis kahdeksan vuoden kuluttua

$$a \cdot 1,015^8 = 1,126...a \approx 1,13a.$$

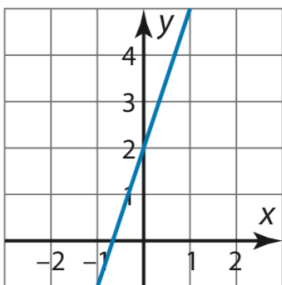
Palkat nousevat kahdeksassa vuodessa 13 %.

## 14.9

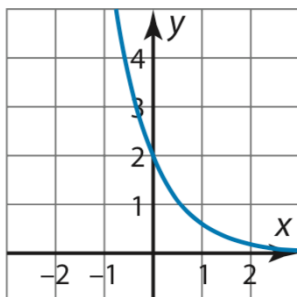
Funktio  $f(x) = 2 \cdot 3^x$  on muotoa  $a \cdot q^x$ , joten se kuvaa eksponentiaalista muutosta. Koska muutoskerroin  $q = 3 > 1$ , funktio kuvaa eksponentiaalista kasvamista. Funktion kuvaaja on siis vaihtoehto 1.



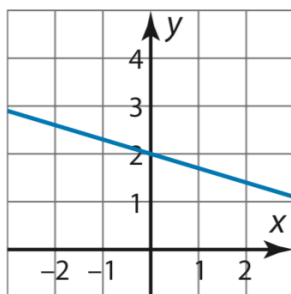
Funktio  $g(x) = 2 + 3x$  on muotoa  $s + kx$ , joten se kuvaa lineaarista muutosta. Koska kulmakerroin  $k = 3 > 0$ , funktio kuvaa lineaarista kasvamista. Funktion kuvaaja on siis vaihtoehto 4.



Funktio  $h(x) = 2 \cdot 0,3^x$  on muotoa  $a \cdot q^x$ , joten se kuvaa eksponentiaalista muutosta. Koska muutoskerroin  $q = 0,3 < 1$ , niin funktio kuvaa eksponentiaalista vähenemistä. Funktion kuvaaja on siis vaihtoehto 3.



Funktio  $i(x) = 2 - 0,3x$  on muotoa  $s + kx$ , joten se kuvaa lineaarista muutosta. Koska kulmakerroin  $k = -0,3 < 0$ , niin funktio kuvaa lineaarista vähenemistä. Funktion kuvaaja on siis vaihtoehto 2.



### Vastaus

$f - 1$ ,  $g - 4$ ,  $h - 3$ ,  $i - 2$

## 14.10

Vakio  $a$  on solujen alkuperäinen määrä. Ajanhetkellä  $x = 0$  funktion arvo  $f(0) = 200\,000$ , joten  $a = 200\,000$ .

Appletin perusteella  $f(1) = 240\,000$ , eli tunnin kuluttua soluja on  $240\,000$ . Toisaalta koska funktio on muotoa  $f(x) = 200\,000 \cdot q^x$ , niin tunnin kuluttua solujen määrä on  $200\,000 \cdot q$ .

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan muutoskerroin  $q$ .

$$200\,000 \cdot q = 240\,000$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$q = 1,2$$

### Vastaus

$$a = 200\,000 \text{ ja } q = 1,2$$

## 14.11

- a) Merkitään yhden tunnin muutoskerrointa kirjaimella  $q$ . Lämpötilaero on alussa  $90\text{ °C} - 10\text{ °C} = 80\text{ °C}$  ja se tulee joka tunti  $q$ -kertaiseksi. Tunnin kuluttua lämpötilaero on  $80 \cdot q\text{ (°C)}$ .

Toisaalta tunnin kuluttua lämpötilaero on  $55\text{ °C} - 10\text{ °C} = 45\text{ °C}$ .

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan muutoskerroin  $q$ .

$$80 \cdot q = 45$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$q = 0,5625$$

Yhdessä tunnissa lämpötilaero pieneni  
 $100\% - 56,25\% = 43,75\% \approx 44\%$ .

- b) Lämpötilaeroa  $x$  tunnin jälkeen ilmaisee funktio  $f(x) = 80 \cdot 0,5625^x$ .

Lasketaan funktion  $f$  arvo, kun  $x = 3$  (tuntia).

$$f(3) = 80 \cdot 0,5625^3 = 14,238... \approx 14\text{ (°C)}$$

Kolmen tunnin kuluttua lämpötilaero on  $14\text{ °C}$ .

- c) Koska ulkolämpötila on  $10\text{ °C}$  ja ulkolämpötilan ja jälkiruuan välinen lämpötilaero on  $14\text{ °C}$ , jälkiruuan lämpötila on

$$10\text{ °C} + 14\text{ °C} = 24\text{ °C}.$$

### Vastaus

- a) 44 %
- b) 14 °C
- c) 24 °C

## 14.12

- a) Merkitään yhden vuoden muutoskerrointa kirjaimella  $q$ . Maapallon väkiluku on vuoden 2000 alussa 6,13 miljardia ja sen määrä tulee joka vuosi  $q$ -kertaiseksi. 15 vuoden kuluttua maapallon väkiluku on  $6,13 \cdot q^{15}$  (miljardia).

Toisaalta 15 vuoden kuluttua maapallon väkiluku on 7,35 miljardia.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan muutoskerroin  $q$ .

$$6,13 \cdot q^{15} = 7,35$$

[Ratkaistaan CAS-laskimella.](#)

$$q = 1,012173\dots$$

$$q \approx 1,01217$$

Maapallon väkiluku tulee joka vuosi keskimäärin 1,01217-kertaiseksi, joten väkiluku kasvaa vuosittain keskimäärin 1,217 %  $\approx$  1,22 %.

- b) Maapallon väkiluvun miljardeina  $x$  vuoden kuluttua ilmaisee funktio  $f(x) = 6,13 \cdot 1,01217^x$ .

Lasketaan funktion  $f$  arvo, kun  $x = 22$  (vuotta).

$$f(22) = 6,13 \cdot 1,01217^{22} = 7,999\dots \approx 8,00 \text{ (miljardia)}$$

Vuoden 2022 alussa maapallon väkiluku on noin 8,00 miljardia.

- c) Ratkaistaan, millä muuttujan  $x$  arvolla funktion  $f$  arvo on 10 (miljardia).

$$f(x) = 10$$

Sijoitetaan  $f(x) = 6,13 \cdot 1,01217^x$ .

$$6,13 \cdot 1,01217^x = 10$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = 40,457\dots$$

$$x \approx 40,5 \text{ (vuotta)}$$

Maapallon väkiluku kasvaa ajan kuluessa, joten väkiluku ylittää 10 miljardia vuoden  $2000 + 40 = 2040$  aikana.

### Vastaus

- a) 1,22 %
- b) 8,00 miljardia
- c) vuoden 2040 aikana

## 14.13

Kootaan tiedot taulukkoon.

vuosi	ruokablogin päivittäinen lukijamäärä
2018	350
2022	3200

- a) Ruokablogien lukijoiden määrä kasvaa joka vuosi yhtä monella lukijalla, joten muutos on lineaarista.

4 vuoden aikana päivittäisten lukijoiden määrä on kasvanut  $3200 - 350 = 2850$  lukijalla. Yhdessä vuodessa kasvu on ollut keskimäärin  $\frac{2850}{4} = 712,5$  lukijaa.

Kun vuoden 2018 alusta on kulunut  $x$  vuotta, ruokablogin lukijoiden määrän ilmaisee funktio

$$f(x) = 712,5x + 350.$$

Lukijamäärään 350  
lisätään  $x$  kertaa 712,5.

Vuosi 2029 on 11 vuotta vuoden 2018 jälkeen. Lasketaan funktion  $f$  arvo, kun  $x = 11$  (vuotta).

$$f(11) = 712,5 \cdot 11 + 350 = 8187,5 \approx 8200$$

Tammikuussa 2029 ruokablogin päivittäisten lukijoiden määrä on noin 8200.

- b) Ruokablogien lukijoiden määrä kasvaa joka vuosi yhtä monta prosenttia, joten muutos on eksponentiaalista.

Merkitään yhden vuoden muutoskerrointa kirjaimella  $q$ . Kun vuodesta 2018 on kulunut 4 vuotta, lukijoiden määrä on  $350 \cdot q^4$ . Toisaalta lukijoiden määrä on 3200.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan muutoskerroin  $q$ .

$$350 \cdot q^4 = 3200$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$q = -1,738883... \quad \text{tai} \quad q = 1,738883...$$

$$q \approx -1,73888 \quad q \approx 1,73888$$

Muutoskerroin on positiivinen luku, joten  $q \approx 1,73888$ .

Kun vuoden 2018 alusta on kulunut  $x$  vuotta, ruokablogin lukijoiden määrän ilmaisee funktio

$$g(x) = 350 \cdot 1,73888^x.$$

Lukijamäärä 350 kerrotaan  
 $x$  kertaa luvulla 1,73888.

Lasketaan funktion  $f$  arvo, kun  $x = 11$  (vuotta).

$$f(11) = 350 \cdot 1,73888^{11} = 153\,827,428... \approx 150\,000$$

Tammikuussa 2029 ruokablogin päivittäisten lukijoiden määrä on noin 150 000.

### Vastaus

- a) 8200  
b) 150 000

## 14.14

- a) Merkitään alkuperäistä isotoopin Rn-222 määrää kirjaimella  $a$  ja yhden vuorokauden muutoskerrointa kirjaimella  $q$ . Rn-222:n määrä tulee  $3,82$  vuorokauden kuluessa  $q^{3,82}$ -kertaiseksi.  
 $3,82$  vuorokauden kuluttua Rn-222:n määrä on  $a \cdot q^{3,82}$ .

Toisaalta  $3,82$  vuorokaudessa Rn-222:n määrä puolittuu, eli  $3,82$  vuorokauden kuluttua määrä on  $0,5a$ .

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan muutoskerroin  $q$ .

$$a \cdot q^{3,82} = 0,5a$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$q = 0,834058\dots$$

$$q \approx 0,83406$$

Yhden vuorokauden aikana Rn-222:n määrästä hajoaa muiksi aineiksi siis  $100\% - 83,406\% = 16,594\% \approx 16,6\%$ .

- b) Rn-222:n määrän  $x$  vuorokauden kuluttua ilmaisee funktio

$$f(x) = a \cdot 0,83406^x.$$

Kaksi viikkoa on  $14$  vuorokautta. Lasketaan funktion  $f$  arvo, kun  $x = 14$  (vuorokautta).

$$f(14) = a \cdot 0,83406^{14} = 0,07884\dots a \approx 0,0788a$$

Kahden viikon kuluttua Rn-222:sta on jäljellä noin  $7,88\%$ .

c) Kun Rn-222:sta on jäljellä 1,00 %, sen määrä on  $0,01a$ .

Ratkaistaan, millä muuttujan  $x$  arvolla funktion  $f$  arvo on  $0,01a$ .

$$f(x) = 0,01a$$

$$\text{Sijoitetaan } f(x) = a \cdot 0,83406^x.$$

$$a \cdot 0,83406^x = 0,01a$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = 25,379\dots$$

$$x \approx 25,4 \text{ (vuorokautta)}$$

Rn-222:n määrä vähenee ajan kuluessa, joten sen määrä on alle 1,00 %, kun aikaa on kulunut vähintään 26 vuorokautta.

### Vastaus

a) 16,6 %

b) 7,88 %

c) 26 vuorokauden

## 14.15

Merkitään veden bakteerien alkuperäistä määrää kirjaimella  $a$ .

Yhden suodatuskerran jälkeen beteen jää  $100\% - 96\% = 4\%$  vedessä olleista bakteereista, joten veden bakteerien määrä tulee  $0,04$ -kertaiseksi. Kun vesi on suodatettu  $x$  kertaa, vedessä olevien bakteerien määrä on tullut  $0,04^x$ -kertaiseksi.

Veden bakteerien määrän  $x$  suodatuksen jälkeen ilmaisee funktio  $f(x) = a \cdot 0,04^x$ .

a) Lasketaan funktion  $f$  arvo, kun  $x = 2$  (suodatusta).

$$f(2) = a \cdot 0,04^2 = 0,0016a$$

Veden bakteerien määrästä on suodattunut pois  $100\% - 0,16\% = 99,84\% \approx 99,8\%$ .

b) Kun bakteereista on suodatettu pois  $99,9995\%$ , jäljellä olevien bakteerien määrä on  $0,0005\%$  eli  $0,000005a$ .

Ratkaistaan, millä muuttujan  $x$  arvolla funktion  $f$  arvo on  $0,000005a$ .

$$f(x) = 0,000005a$$

Sijoitetaan  $f(x) = a \cdot 0,04^x$ .

$$a \cdot 0,04^x = 0,000005a$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = 3,792\dots$$

$$x \approx 3,8 \text{ (suodatusta)}$$

Koska suodatusten määrä on kokonaisluku, bakteereista on suodattunut pois  $99,9995\%$ , kun vesi on suodatettu vähintään  $4$  kertaa.

- c) Merkitään bakteerien määrän muutoskerrointa kirjaimella  $q$ . Kun vesi on suodatettu kaksi kertaa, vedessä olevien bakteerien määrä on  $a \cdot q^2$ .

Toisaalta bakteereista poistuu 99,9995 %, joten vedessä olevien bakteerien määrä kahden suodatuksen jälkeen on  $0,000\,005a$ .

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan muutoskerroin  $q$ .

$$a \cdot q^2 = 0,000005a \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$q = -0,0022360\dots \quad \text{tai} \quad q = 0,0022360$$

$$q \approx -0,002236 \quad q \approx 0,002236$$

Muutoskerroin on positiivinen luku, joten  $q \approx 0,002236$ .

Jotta bakteereista poistuu kahdella suodatuskerralla 99,9995 %, täytyy yhden suodatuskerran poistaa bakteereista  
 $100 \% - 0,2236 \% = 99,7764 \% \approx 99,78 \%$

### Vastaus

- a) 99,8 %
- b) vähintään 4 kertaa
- c) 99,78 %

## 14.16

- a) Väite on epätosi. Funktio  $f(x) = 0,2 \cdot 1,5^x$  muutoskerroin  $q = 1,5 > 1$ , joten funktio kuvaa eksponentiaalista kasvamista.
- b) Väite on tosi. Funktio  $f(x) = 1,5 \cdot 0,2^x$  muutoskerroin  $q = 0,2 < 1$ , joten funktio kuvaa eksponentiaalista vähenemistä.
- c) Väite on tosi. Funktio  $f(x) = 0,2 \cdot 1,5^x$ , missä  $x$  on aika vuosina, muutoskerroin  $1,5$  tarkoittaa, että funktion arvo tulee joka vuosi  $1,5$ -kertaiseksi. Muutoskerroin  $1,5 = 150\%$  vastaa  $50\%$  kasvua.
- d) Väite on epätosi. Funktio  $f(x) = 1,5 \cdot 0,2^x$ , missä  $x$  on aika viikkoina, muutoskerroin  $0,2$  tarkoittaa, että funktion arvo tulee  $0,2$ -kertaiseksi joka viikko. Tällöin funktion arvo pienenee viikossa  $100\% - 80\% = 20\%$ .

### Vastaus

- a) epätosi  
b) tosi  
c) tosi  
d) epätosi

## 14.17

- a) Merkitään alkuperäistä alkoholinkulutusta kirjaimella  $a$  ja yhden vuoden muutoskerrointa kirjaimella  $q$ . Alkoholinkulutus tulee yhden vuoden aikana  $q$ -kertaiseksi. 5 vuoden kuluttua alkoholinkulutus on  $a \cdot q^5$ .

Toisaalta 5 vuodessa alkoholinkulutusta vähenee 20 %, eli kulutus 5 vuoden kuluttua on  $0,8a$ .

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan muutoskerroin  $q$ .

$$a \cdot q^5 = 0,8a$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$q = 0,956352\dots$$

$$q \approx 0,95635$$

Yhden vuoden aikana alkoholinkulutuksen tulee vähentyä siis  $100 \% - 95,635 \% = 4,365 \% \approx 4,4 \%$ .

- b) Kun alkoholinkulutus on vähentynyt puoleen sen alkuperäisestä arvosta  $a$ , alkoholinkulutus on  $0,5a$ .

Alkoholinkulutuksen  $x$  vuoden kuluttua ilmaisee funktio

$$f(x) = a \cdot 0,95635^x.$$

Ratkaistaan, millä muuttujan  $x$  arvolla funktion  $f$  arvo on  $0,5a$ .

$$f(x) = 0,5a$$

Sijoitetaan  $f(x) = a \cdot 0,95635^x$ .

$$a \cdot 0,95635^x = 0,5a$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = 15,530\dots$$

$$x \approx 16 \text{ (vuotta)}$$

Alkoholinkulutus vähenee puoleen noin 16 vuodessa.

### Vastaus

a) 4,4 %

b) 16 vuodessa

## 14.18

- a) Merkitään kofeiinin alkuperäistä määrää elimistössä kirjaimella  $a$  ja yhden tunnin muutoskerrointa kirjaimella  $q$ . Kofeiinin määrä tulee yhden tunnin aikana  $q$ -kertaiseksi. 6 tunnin kuluttua kofeiinin määrä on  $a \cdot q^6$ .

Toisaalta 6 tunnin kuluttua kofeiinin määrä elimistössä on puolittunut, eli on  $0,5a$ .

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan muutoskerroin  $q$ .

$$a \cdot q^6 = 0,5a \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$q = -0,890898... \quad \text{tai} \quad q = 0,890898...$$

$$q \approx -0,89090 \quad q \approx 0,89090$$

Muutoskerroin on positiivinen luku, joten  $q \approx 0,89090$ .

Tunnin kuluttua nautitusta kofeiinista on siis jäljellä  $89,090 \% \approx 89 \%$ .

- b) Kofeiinin määrän elimistössä milligrammoina  $x$  tunnin kuluttua ilmaisee funktio  $f(x) = a \cdot 0,89090^x$ , missä  $a$  on nautitun kofeiiniannoksen määrä milligrammoina.

Lasketaan erikseen, kuinka paljon jokaisesta nautitusta kofeiiniannoksesta on jäljellä klo 22.00.

- 1) Mukillisessa teetä on kofeiinia 100 mg. Lasketaan, kuinka paljon siitä on jäljellä elimistössä klo 22.00 (eli 14,5 tuntia nauttimisen jälkeen).

Lasketaan funktion  $f$  arvo, kun  $a = 100$  (mg) ja  $x = 14,5$  (tuntia).

$$f(14,5) = 100 \cdot 0,89090^{14,5} = 18,729... \approx 18,73 \text{ (mg)}$$

- 2) Kolajuomassa kofeiinia on 10 mg / 100 ml, joten puolessa litrassa kolajuomaa kofeiinia on 50 mg. Lasketaan, kuinka paljon siitä on jäljellä elimistössä klo 22.00 (eli 6 tuntia nauttimisen jälkeen).

Lasketaan funktion  $f$  arvo, kun  $a = 50$  (mg) ja  $x = 6$  (tuntia).

$$f(6) = 50 \cdot 0,89090^6 = 25,000... \approx 25,00 \text{ (mg)}$$

- 3) Mai joi energiajuomaa 330 ml, missä kofeiinia on  $330 \text{ ml} \cdot \frac{32 \text{ mg}}{100 \text{ ml}} = 105,6 \text{ mg}$ . Lasketaan, kuinka paljon siitä on jäljellä elimistössä klo 22.00 (eli 2,5 tuntia nauttimisen jälkeen).

Lasketaan funktion  $f$  arvo, kun  $a = 105,6$  (mg) ja  $x = 2,5$  (tuntia).

$$f(2,5) = 105,6 \cdot 0,89090^{2,5} = 79,110... \approx 79,11 \text{ (mg)}$$

Kello 22.00 Main elimistössä kofeiinia on yhteensä

$$18,73 \text{ mg} + 25,00 \text{ mg} + 79,11 \text{ mg} = 122,84 \text{ mg} \approx 120 \text{ mg}.$$

### Vastaus

a) 89 %

b) 120 mg

## 14.19

- a) Merkitään yhden tunnin muutoskerrointa kirjaimella  $q$ . Lämpötilaero on alussa  $40\text{ °C} - 5,0\text{ °C} = 35\text{ °C}$  ja se tulee joka tunti  $q$ -kertaiseksi. Tunnin kuluttua lämpötilaero on  $35 \cdot q\text{ (°C)}$ .

Toisaalta tunnin kuluttua lämpötilaero on  $25\text{ °C} - 5,0\text{ °C} = 20\text{ °C}$ .

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan muutoskerroin  $q$ .

$$35 \cdot q = 20$$

[Ratkaistaan CAS-laskimella.](#)

$$q = 0,571428\dots$$

$$q \approx 0,57143$$

Simapullon ja jääkaapin lämpötilaeron Celsius-asteina  $x$  tunnin kuluttua ilmaisee funktio  $f(x) = 35 \cdot 0,57143^x$ .

Lasketaan funktion  $f$  arvo, kun  $x = 4$  (tuntia).

$$f(4) = 35 \cdot 0,57143^4 = 3,731\dots \approx 3,7\text{ (°C)}$$

Koska jääkaapin lämpötila on  $5,0\text{ °C}$ , simapullon lämpötila on neljän tunnin kuluttua noin  $5,0\text{ °C} + 3,7\text{ °C} = 8,7\text{ °C}$ .

- b)** Kun simapullon lämpötila on alle  $10\text{ }^{\circ}\text{C}$ , simapullon ja jääkaapin välinen lämpötilaero on alle  $5\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

Ratkaistaan, millä muuttujan  $x$  arvolla funktion  $f$  arvo on  $5\text{ }(^{\circ}\text{C})$ .

$$f(x) = 5$$

$$\text{Sijoitetaan } f(x) = 35 \cdot 0,57143^x.$$

$$35 \cdot 0,57143^x = 5$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = 3,477\dots$$

$$x \approx 3,5 \text{ (tuntia)}$$

Simapullon lämpötila on alle  $10\text{ }^{\circ}\text{C}$  noin  $3,5$  tunnin kuluttua.

### **Vastaus**

**a)**  $8,7\text{ }^{\circ}\text{C}$

**b)**  $3,5$  tunnin

## 14.20

Merkitään yhden vuoden muutoskerrointa kirjaimella  $q$ . C-14-isotoopin alkuperäinen aktiivisuus grammaa kohti on 13,6 Bq.

5730 vuoden kuluttua aktiivisuus on  $13,6 \cdot q^{5730}$  (Bq).

Toisaalta 5730 vuoden kuluttua aktiivisuus on puolittunut, eli on

$$\frac{13,6 \text{ Bq}}{2} = 6,8 \text{ Bq}.$$

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan muutoskerroin  $q$ .

$$13,6 \cdot q^{5730} = 6,8$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$q = -0,999879... \quad \text{tai} \quad q = 0,999879...$$

$$q \approx -0,99988 \quad q \approx 0,99988$$

Muutoskerroin on positiivinen luku, joten  $q \approx 0,99988$ .

C-14-isotoopin aktiivisuuden  $x$  vuoden kuluttua ilmaisee funktio

$$f(x) = 13,6 \cdot 0,99988^x.$$

Ratkaistaan millä muuttujan  $x$  arvolla funktion  $f$  arvo on 12,9 (Bq).

$$f(x) = 12,9$$

Sijoitetaan  $f(x) = 13,6 \cdot 0,99988^x$ .

$$13,6 \cdot 0,99988^x = 12,9$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = 440,327...$$

$$x \approx 440 \text{ (vuotta)}$$

Puuesine on noin 440 vuotta vanha, joten väite ei pidä paikkaansa.

### Vastaus

Ei pidä paikkaansa. (Esine on noin 440 vuotta vanha.)

## 14.21

- a) CRP:n pitoisuus enimmillään kaksinkertaistuu kahdeksan tunnin aikana, eli kahdeksan tunnin kuluttua CRP:n pitoisuus on enintään  $2 \cdot 40 = 80$ .

Merkitään yhden tunnin muutoskerrointa kirjaimella  $q$ .

CRP:n pitoisuus on alussa 40 ja sen määrä tulee voi tulla joka tunti enintään  $q$ -kertaiseksi. Kahdeksan tunnin kuluttua CRP:n

maksimipitoisuus on  $40 \cdot q^8$ .

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan muutoskerroin  $q$ .

$$40 \cdot q^8 = 80$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$q = -1,090507... \quad \text{tai} \quad q = 1,090507...$$

$$q \approx -1,09051 \quad q \approx 1,09051$$

Muutoskerroin on positiivinen luku, joten  $q = 1,09051$ .

CRP:n maksimipitoisuuden  $x$  tunnin kuluttua ilmaisee funktio

$$f(x) = 40 \cdot 1,09051^x.$$

Klo 18.00 on 6 tuntia potilaan CRP-pitoisuuden mittaamisen jälkeen.

Lasketaan funktion  $f$  arvo, kun  $x = 6$  (tuntia).

$$f(6) = 40 \cdot 1,09051^6 = 67,272... \approx 67$$

CRP:n pitoisuus klo 18.00 voi olla enintään 67.

b) Merkitään yhden tunnin muutoskerrointa kirjaimella  $p$ .

CRP:n pitoisuus on alussa 100 ja sen määrä tulee joka tunti  $p$ -kertaiseksi. 19 tunnin kuluttua CRP:n pitoisuus on  $100 \cdot p^{19}$ .

Toisaalta CRP:n pitoisuus puolittuu 19 tunnin aikana, eli 19 tunnin kuluttua CRP:n pitoisuus on  $\frac{100}{2} = 50$ .

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan muutoskerroin  $p$ .

$$100 \cdot p^{19} = 50$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$p = 0,964175\dots$$

$$p \approx 0,96418$$

CRP:n minimipitoisuuden  $x$  tunnin kuluttua ilmaisee funktio

$$f(x) = 100 \cdot 0,96418^x.$$

Lasketaan, millä muuttujan  $x$  arvolla funktion  $f$  arvo on 10.

$$f(x) = 10$$

Sijoitetaan  $f(x) = 100 \cdot 0,96418^x$ .

$$100 \cdot 0,96418^x = 10$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = 63,123\dots$$

$$x \approx 63 \text{ (tuntia)}$$

CRP:n pitoisuus voi olla laskenut arvoon 10 aikaisintaan, kun on kulunut 63 tuntia mittaushetkestä. Muutetaan aika vuorokausiksi ja tunneiksi.

$$63 \text{ h} = 2 \cdot 24 \text{ h} + 15 \text{ h} = 2 \text{ vrk} + 15 \text{ h}$$

Siis pitoisuus voi olla laskenut arvoon 10 aikaisintaan torstaina klo 03.00.

### Vastaus

a) 67

b) torstaina klo 03.00